

Bref résumé Chap 1-2-3 :

COURS 6.1

15 oct 24

Chap 1 :

- résoudre un syst. lin.
- faire des opérém
- donner l'ens. solution
- passage système $\leftrightarrow$ matrice

- espaces $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$)

- comb. linéaires de vect. de $\mathbb{R}^n$

- (in)dépendance linéaire

- trans. linéaire $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

- vocabulaire / matrices

trans. linéaires

- surj. / injectivité / bijectivité

on va
y
revenir

Chap 2 :

- matrices et op. matricielles

$+$, $\cdot$

- transposée, inverse

- matr. élémentaire

- méga-théorème

Chap 3 : Déterminants

- définition / propriétés
- règles de calculs
- super-thm $(\det(AB) = \det(A) \det(B))$
- matrices élém et déterminants
- Addendum
- (hyper) volumes $n=2,3$



Chap 4 : Espaces vectoriels :

But : Abstraire l'ensemble $\mathbb{R}^n$

muni de ses structures

(G. Peano, 1888)

+

· par
un scalaire

§ 4.1 Espaces vectoriels

Def 4.1.1 : on nomme $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

ou espace vectoriel (réel), tout

ensemble non vide V , muni de

deux structures/opérations

appelées : addition (interne à V)

multiplication par un scalaire

($\in \mathbb{R}$)

$$1) \quad V \times V \longrightarrow V$$

$$(v, w) \longmapsto v + w$$

$$2) \quad \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$

$$(\lambda, v) \longmapsto \lambda v$$

qui satisfont / vérifient les propriétés suivantes :



$$1) \forall u, v \in V \quad u+v = v+u$$

$$2) \forall u, v, w \in V \quad (u+v)+w = u+(v+w)$$

$$3) \exists 0_V \in V \text{ t.q. } 0_V + v = v = v + 0_V \quad \forall v \in V$$

$$4) \forall v \in V, \exists -v \in V$$

tel que $v + (-v) = 0_V$

$$5) \forall u, v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$$

Red arrows: One from λ to u and v with the label "dans V". Another from λ to λu and λv with the label "dans $\mathbb{R}$ ".

$$6) \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall v \in V$$

$$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$$

Green arrow: From $\lambda + \mu$ to λ and μ with the label "dans $\mathbb{R}$ ".

$$7) \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall v \in V$$

$$(\lambda \mu)v = \lambda(\mu v)$$

Green arrow: From $\lambda \mu$ to λ and μ with the label " $\in \mathbb{R}$ ".

$$8) \forall v \in V \quad 1 \cdot v = v$$

(Fin def. 4.1.1)

^{Morale}
Nota bene: Un espace vectoriel V
est un ensemble dans lequel on
peut faire des combinaisons linéaires
de ses éléments :

$$\begin{array}{l} \text{s) } u, v \in V \\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{array} \leadsto \lambda u + \mu v \in V$$

Def 4.1.2 :

- les éléments de V s'appellent vecteurs
- $0_V \in V$ s'appelle le vecteur nul
(et il est unique)
- $\forall v \in V$, le vecteur $-v$
est l'opposé de v (et il est unique)

Propriétés 4.1.3 : Soit $(V, +, \cdot, 0_V)$
un espace vectoriel
alors on a

$$1) \quad 0_{\mathbb{R}} \cdot v = 0_V \quad \forall v \in V$$

$$2) \quad \lambda \cdot 0_V = 0_V \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$3) \quad -v = (-1) \cdot v \quad \forall v \in V$$

démo de 1)

calculons, pour $v \in V$,

$$0_{\mathbb{R}} \cdot v = (0+0) \cdot v = 0_{\mathbb{R}} \cdot v + 0_{\mathbb{R}} \cdot v$$

$\uparrow$
 $0+0=0_{\mathbb{R}}$

6)

posons $w = 0_{\mathbb{R}} \cdot v$, on a

$$w = w + w$$

$$\downarrow \quad 4) \quad -w$$

$$w - w = 0_V = w = 0_{\mathbb{R}} \cdot v \quad \text{cqd point 1).}$$

Exemples 4.1.3 :

0) L'ensemble $V = \{0_{\mathbb{R}}\}$

est un espace vectoriel
appelé l'espace nul

$$\text{opérations: } \begin{cases} 0 + 0 = 0 \\ \lambda \cdot 0 = 0 \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

(+ général. $V = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$)

1) Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'espace
des coordonnées $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

muní de l'addition vectorielle
et la mult. par un scalaire
déf. au chap. 1 est
un espace vectoriel.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

$$x+y \stackrel{\text{def}}{:=} \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

en particulier, pour $n=1$, $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.

2) [La source de tous les espaces vectoriels]

Soit X un ensemble

Notons par $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble

$$\left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est une fonction} \right\}$$

et définissons $+$ et $\cdot$ comme suit :

$$\mathcal{F}(X; \mathbb{R}) \times \mathcal{F}(X; \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(X; \mathbb{R})$$

$$(f, g) \mapsto f + g$$

où $f + g : X \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$x \mapsto (f + g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + g(x)$$

$\nearrow$
 $\in \mathcal{F}(X; \mathbb{R})$
 $\nwarrow$
 $\in \mathbb{R}$

et $\mathbb{R} \times \mathcal{F}(X; \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(X; \mathbb{R})$

$$(\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f$$

où $\lambda f : X \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto (\lambda f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \cdot f(x)$$

$\nearrow$
 $\in \mathcal{F}(X; \mathbb{R})$
 $\downarrow$
 $\in \mathbb{R}$

Alors $\mathcal{F}(X; \mathbb{R})$ muni de ces opérations est un espace vectoriel

où l'élément neutre est la fonction nulle.

$$0_X : X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 0$$

Rem: pour $f, g \in \mathcal{F}(X; \mathbb{R})$
on a $f = g$ (dans $\mathcal{F}(X; \mathbb{R})$)
 $\Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad \forall x \in X$

2.0) $X = \{1, \dots, n\} \quad n \in \mathbb{N} - \{0\}$

$$\mathcal{F}(\{1, \dots, n\}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\text{bijection}} \mathbb{R}^n$$
$$f \mapsto \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ \vdots \\ f(n) \end{pmatrix}$$

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par $i \mapsto x_i$

$$\leftarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(càd $f(i) := x_i$ par définition)

2.1) Si $X = \mathbb{N}$, alors

$\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) =$ l'ens. des suites de
nombres réels

en effet à toute fonction

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$n \mapsto f(n)$$

on associe la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

définie par $x_n = f(n)$

En particulier $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ est un
espace vectoriel

et donc on peut faire des

comb. linéaires (C.L)
de suites.

2.2) $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ espace
vectoriel
des fonctions
réelles à 1 variable

ex: $f(t) = \cos(t) + \pi - t^2 + e^t$

$$g(t) = \sin(4t^2)$$

$$f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

donc on peut considérer

$$(3f - 5g)(t)$$

$$= 3\cos(t) + 3\pi - 3t^2 + 3e^t - 5\sin(4t^2)$$

3) Espaces des polynômes P_n

$$P_n \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \text{le sous-ensemble}$$

$$P_n = \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \begin{array}{l} \exists a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \\ \text{tels que} \\ f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n \\ \forall t \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

= l'ens. des polynômes à coeff. réels
et de degré $\leq n$

Remn/déf/rappel : $p(t) = a_0 + \dots + a_n t^n$ $a_i \in \mathbb{R}$

on définit le degré de p comme

$$\deg(p) = \begin{cases} -\infty & \text{si } p(t) = 0 \forall t \\ \max\{i\} & \text{t.q. } a_i \neq 0 \\ & \text{(si } \underline{p(t) \neq 0} \\ & \underline{\text{pour un } t \in \mathbb{R}}) \end{cases}$$

ex: $\deg(t^3 + 1) = 3$

$$\deg(4) = 0$$

$$\deg(0) = -\infty$$

4) $M_{m \times n}(\mathbb{R}) =$ l'esp. des matrices $m \times n$

muni de l'add. matricielle

et la mult. par un scalaire

(vu au
chap 2)

on peut donc faire des C.L.

de matrices de même taille.

§ 4.2. Sous-espaces vectoriels

(Lay. p. 207)

Déf 4.2.1 : Soit V un espace vectoriel
et $W \subset V$ un sous-ensemble.

On dit que W est un sous-espace (vectoriel)
de V s'il vérifie

a) $0_V \in W$

b) $\forall u, v \in W$, on doit avoir
 $u + v \in W$

c) $\forall u \in W$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on doit avoir
 $\lambda \cdot u \in W$

(W est "stable" par addition et multipl. par
un scalaire)

Proposition 4.2.2 :

1) $W \subset V$ espace vectoriel. Alors W est un sous-espace de V si et seul. si,

i) W est non vide

ii) $\forall u, v \in W, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\lambda u + v \in W}$$

2) $W \subset V$ est un sous-espace

$\Leftrightarrow W$ est non vide et stable par C.L.
($\lambda u + \mu v \in W$)

$\Leftrightarrow W$ est un espace vectoriel
par les mêmes opérations que V .

Exemples (jeudi) :